

Derivation of ideal gas adiabatic relations by using diagrams

Suk Joo YOUN*

Department Physics Education, Gyeongsang National University, Jinju 52828, Korea

(Received 16 April 2025 : revised 12 May 2025 : accepted 13 May 2025)

In the adiabatic process, the temperature, volume, and pressure of an ideal gas satisfy the adiabatic relations. Most general physics textbooks derive the adiabatic relations by using differential equations derived from the first law of thermodynamics. For physics majors, methods from statistical mechanics are also known. In addition, we show that the adiabatic relations are derived by using diagrams. Deriving the adiabatic relations by using a visual method using diagrams can reduce the mathematical burden and help the adiabatic process be intuitively understood. We calculate the entropy change for the adiabatic process in three diagrams, namely, PV , TV , and TP diagrams, and derive the adiabatic relations through these.

Keywords: Physics education, Thermodynamics, Entropy, Adiabatic relations, Diagram

도표를 활용한 이상기체 단열 관계식의 유도

윤석주*

경상국립대학교 물리교육과, 진주 52828, 대한민국

(2025년 4월 16일 받음, 2025년 5월 12일 수정본 받음, 2025년 5월 13일 게재 확정)

단열 과정에서 이상기체의 온도, 부피, 압력을 단열 관계식을 만족하는데 대부분의 일반물리학 교재에서는 열역학 제1법칙에서 출발한 미분식을 이용하여 단열 관계식을 유도한다. 물리관련 전공자들을 위해서는 통계역학적 방법도 알려져 있다. 여기에 더해서 우리는 도표를 활용하여 단열 관계식이 유도됨을 보인다. 도표를 활용한 시각적 방법으로 단열 관계식을 유도하면 수학적 부담을 줄이고 유도과정을 직관적으로 이해하도록 도울 수 있다. 우리는 세 가지 도표 즉 PV , TV , TP 도표에서 단열 과정에 대한 엔트로피 변화를 계산하고 이를 통해 단열 관계식을 유도한다.

Keywords: 물리교육, 열역학, 단열 과정, 엔트로피, 단열 관계식, 도표

I. 서 론

이상기체의 단열 과정은 대학에서 교양과정 학생들을 위한 일반물리학 교재의 대부분에서 중요하게 다루고 있는

*Correspondence to: ysj@gnu.ac.kr

내용이다 [1–5]. 열역학 분야를 다룰 때 열역학 제1법칙이 적용되는 사례의 하나로 단열 과정을 소개한다. 단열 과정은 카르노 기관, 오토 기관, 디젤 기관, 제트 기관과 같은 열기관의 순환 과정의 일부로 쓰이고 있으며, 공기중 소리의 전달과 [1,2] 실제 냉장고의 작동에도 [6] 관련된다. 또한 단열 과정은 편 현상이나 구름의 형성과 같이 생활속의 자

연현상과 물리법칙을 연결할 수 있는 흥미로운 주제이기도 하다 [7].

특히 카르노 기관은 두 개의 등온 과정과 두 개의 단열 과정으로 이루어진 간단한 순환 과정으로 열기관중에서 가장 높은 열효율을 보인다. 역사적으로 카르노 기관의 가장 높은 효율을 설명하는 과정에서 가역 과정, 열역학 제1법칙, 열역학 제2법칙, 절대온도, 엔트로피와 같은 개념이 형성되는 계기가 되었다 [8]. 이런 역사적인 중요성을 가진 카르노 기관을 이해하기 위해서도 단열 과정의 이해가 필요하다.

단열 과정은 계와 주위 환경 사이에 열전달이 없는 상태로 진행되는 과정이다. 가역적 단열 과정의 경우 계의 엔트로피는 일정한 값을 유지하며 계의 압력, 부피, 온도 사이에는 독특한 관계식이 성립하는데 이를 푸아송 단열 관계식(Poisson adiabatic relation)라 한다 [9].

단열 관계식을 유도하는 두 가지 방법이 알려져 있다 [10, 11]. 첫째로 열역학 제1법칙과 이상기체의 상태방정식을 활용하는 방법이다. 미분을 이용하여 단열 과정에 대한 열역학 제1법칙을 표시하고 이 식을 적분하여 단열 관계식을 얻는다. 대부분의 일반물리학 및 열물리학 교재에서 쓰이는 방법이다 [1-5, 12-17]. 두 번째는 통계역학적 계산을 통하여 이상기체의 엔트로피에 대한 식을 얻고 이로부터 단열 관계식을 얻는 방법이다 [9, 18]. 이 방법은 일반물리학의 수준을 넘는 내용이므로 일반물리학을 수강한 물리관련 전공자들에게 적합하다.

최근 우리나라 일반물리학 교육이 당면한 문제점은 대학에 입학하는 학생들의 수학 실력이 감소하고 있다는 것이다 [19]. 열역학 제1법칙에서 유도된 미분 방정식을 이용한 방법은 수학적으로 깔끔하지만 다변수함수의 미분과 미분 방정식의 풀이법에 익숙하지 않은 학생들에게는 단열 관계식의 유도과정을 따라가는 것이 부담스러울 수 있다. 이러한 수학적 논리전개뿐만 아니라 도표를 활용하여 시각적인 도움을 준다면 학생들이 단열 과정을 직관적으로 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다 [20-22].

본 연구에서는 다양한 도표를 활용하여 엔트로피 변화 ΔS 를 계산하고, 이를 통하여 단열 관계식이 유도됨을 보여준다. 대부분의 일반물리학 교재에서 엔트로피 변화는 열역학 제2법칙에 대한 단원에서 학습한다. 열역학 제1법칙을 활용하여 단열 관계식을 유도하고, 다시 열역학 제2법칙을 통해서도 같은 식이 유도됨을 보인다면 물리법칙의 일관성을 보여주며 반복학습을 통해 학습효과를 높일 수 있다.

II. 단열 관계식의 유도

도표를 활용하여 단열 관계식이 유도되는 것을 보여주는 것이 본 연구의 주된 내용이지만 단열 과정에 대한 폭넓은 이해와 유도 방법 사이의 비교를 위하여 기존의 방법 즉 미분방정식을 이용한 방법과 통계역학적 방법도 함께 소개한다.

1. 미분방정식을 이용한 방법

n 몰의 이상기체로 이루어진 계는 다음과 같은 열역학 제1법칙을 만족한다.

$$dQ = nc_V dT + P dV \quad (1)$$

여기서 Q, T, P, V 는 각각 계에 가한 열, 계의 온도, 계의 압력, 계의 부피를 나타내며 c_V 는 정적 몰비열이다. 단열 과정일 때 열역학 제1법칙은 다음과 같이 줄어든다.

$$nc_V dT + P dV = 0 \quad (2)$$

Equation (2)의 열역학 제1법칙에는 세 개의 변수 즉 P, V, T 가 포함되어 있는데, 아래의 이상기체의 상태방정식을 이용하여 변수의 갯수를 하나 줄일 수 있다.

$$PV = nRT \quad (3)$$

여기서 R 은 기체상수이다.

Equation (2)에서 압력 P 를 소거한 후 정리하면 아래와 같다.

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \quad (4)$$

여기서 비열비 또는 푸아송 상수 γ 는 아래와 같다.

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

c_P 는 정압 몰비열이며 다음 식을 만족한다.

$$c_P - c_V = R$$

Equation (4)을 적분하여 다음 식을 얻는다.

$$TV^{\gamma-1} = k \quad (5)$$

여기서 k 는 상수이며 단열 과정에서 일정한 값을 유지하는 것을 나타낸다.

참고로 Eq. (4)로부터 단열 팽창 계수 α_S 를 얻을 수 있다.

$$\alpha_S = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_S = -\frac{1}{(\gamma - 1)T} \quad (6)$$

단열팽창에 의해 기체의 온도가 내려가는 것을 알 수 있다.

이상기체의 상태방정식 즉 Eq. (3)의 양변을 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$PdV + VdP = nRdT \quad (7)$$

Equation (3)의 상태방정식에는 세 개의 변수가 포함되므로 미분식을 얻기위해서는 다변수 함수의 미분 즉 편미분이 쓰인다.

Equation (2)와 (7)에서 dT 를 소거한 후 정리하면 두 번째 단열 관계식을 얻는다.

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (8)$$

위 미분 방정식을 적분하여 다음 식을 얻는다

$$PV^\gamma = k \quad (9)$$

참고로 Eq. (8)으로부터 이상기체의 단열 부피탄성률(bulk modulus) B_S 를 얻을 수 있다.

$$B_S = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S = \gamma P \quad (10)$$

등온 부피탄성률 $B_T = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = P$ 보다 큰 것을 알 수 있다. 기체를 통한 음파의 전달은 단열 과정이므로 기체속 음파의 속력에 영향을 미친다.

Equation (2)와 (7)에서 dV 를 소거한 후 정리하면 세 번째 단열 관계식을 얻는다.

$$(\gamma - 1) \frac{dP}{P} - \gamma \frac{dT}{T} = 0 \quad (11)$$

위 미분 방정식을 적분하여 다음 식을 얻는다

$$\frac{P^{\gamma-1}}{T^\gamma} = k \quad (12)$$

Equation (5), (9), (12)를 풀어놓 단열 관계식이라 한다. 이렇게 미분 방정식을 이용하여 단열 관계식을 유도하는 방법은 수학적으로는 매끄럽지만 일부 유도과정에서 편미분이 쓰이는 단점이 있다.

2. 도표를 활용한 방법

가역적 단열 과정에서 이상기체의 엔트로피는 변하지 않는다는 점을 이용하여 단열 관계식을 유도할 수 있다. 엔트로피의 변화는 클라우지우스의 정의를 이용하여 계산한다.

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} \quad (13)$$

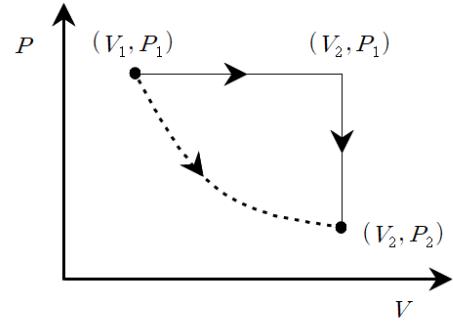


Fig. 1. Adiabatic process plotted in a PV diagram. The dotted line represents an adiabatic process from (V_1, P_1) to (V_2, P_2) and the solid line represents an isobaric process followed by an isovolume process.

이때 계산과정을 도표에 표시하여 시각적인 효과를 준다면 엔트로피 변화를 직관적으로 이해하는데 도움을 줄 수 있다.

이상기체의 단열 과정에서 압력 P , 부피 V , 온도 T 가 변수이고, 하나의 도표에는 두 개의 변수를 표시할 수 있으므로 세 가지 도표가 가능한 것을 알 수 있다. 엔트로피는 상태변수이고 엔트로피 변화는 중간과정과 상관없이 처음과 나중 상태에만 관련된다는 것이 알려져 있으므로 각각의 도표에서 단열 과정을 몇 개의 단순과정으로 나누면 엔트로피 변화를 쉽게 계산할 수 있다.

1) PV 도표

Figure 1은 PV 도표에 이상기체의 단열 과정을 나타낸 것이다. 점선은 단열 과정을 나타내며, 실선은 등압 과정과 등적 과정으로 나누어 표시한 것이다.

단열 과정에 의해 처음상태 (V_1, P_1) 에서 나중상태 (V_2, P_2) 로 변할 때 엔트로피 변화는 없으며, 이것을 등압 과정과 등적 과정으로 나누어 계산해도 같은 값을 준다. 계산 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta S &= nC_P \ln \frac{V_2}{V_1} + nC_V \ln \frac{P_2}{P_1} \\ &= nC_V \ln \frac{P_2 V_2^\gamma}{P_1 V_1^\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

위 식은 임의의 단열 과정에서 항상 성립하므로 다음 식을 얻는다.

$$PV^\gamma = k \quad (15)$$

여기서 k 는 하나의 상수를 나타낸다.

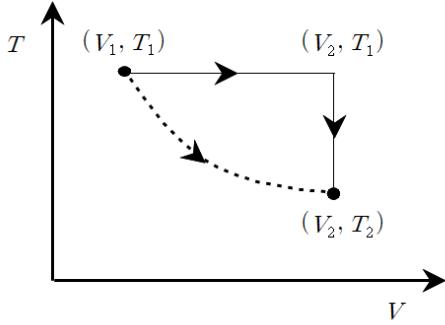


Fig. 2. Adiabatic process plotted in a TV diagram. The dotted line represents an adiabatic process from (V_1, T_1) to (V_2, T_2) and the solid line represents an isothermal process followed by an isovolume process.

2) TV 도표

Figure 2은 TV 도표에 이상기체의 단열 과정을 나타낸 것이다. 점선은 단열 과정을 나타내며, 실선은 등온 과정과 등적 과정으로 나누어 표시한 것이다.

단열 과정에 의해 처음상태 (V_1, T_1) 에서 나중상태 (V_2, T_2) 로 변할 때의 엔트로피 변화를 등온 과정과 등적 과정으로 나누어 계산한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta S &= nR \ln \frac{V_2}{V_1} + nc_V \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= nc_V \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 0\end{aligned}\quad (16)$$

위 식은 임의의 단열 과정에서 성립하므로 다음 식을 얻는다.

$$TV^{\gamma-1} = k \quad (17)$$

여기서 k 는 하나의 상수를 나타낸다.

3) TP 도표

Figure 3은 TP 도표에 이상기체의 단열 팽창과정을 나타낸 것인데 온도와 압력이 모두 낮아진다. 점선은 단열 과정을 나타내며, 실선은 등온 과정과 등압 과정으로 나누어 표시한 것이다.

단열 과정에 의해 처음상태 (P_1, T_1) 에서 나중상태 (P_2, T_2) 로 변할 때의 엔트로피 변화를 등온 과정과 등압 과정으로 나누어 계산한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta S &= nR \ln \frac{P_1}{P_2} + nc_P \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= nc_V \ln \frac{P_1^{\gamma-1} T_2^{\gamma}}{P_2^{\gamma-1} T_1^{\gamma}} = 0\end{aligned}\quad (18)$$

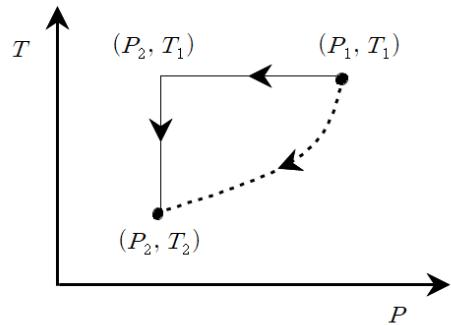


Fig. 3. Adiabatic process plotted in a TP diagram. The dotted line represents an adiabatic process from (P_1, T_1) to (P_2, T_2) and the solid line represents an isothermal process followed by an isobaric process.

이 식은 임의의 단열 과정에서 성립하므로

$$\frac{P^{\gamma-1}}{T^{\gamma}} = k \quad (19)$$

여기서 k 는 하나의 상수를 나타낸다.

도표를 이용하여 Eq. (15), (17), (19)의 푸아송 단열 관계식을 얻었다.

3. 통계역학적 방법

단원자 이상기체에 대한 통계역학적 계산을 통하여 이상 기체의 엔트로피를 계산하고 이로부터 단열공식을 유도할 수도 있다. 병진운동하는 이상기체의 엔트로피는 다음과 같다 [9,18].

$$S = nR \left[\ln \frac{V}{N} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} \right] \quad (20)$$

여기서 k_B 는 볼츠만 상수이고, \hbar 는 환산된 플랑크 상수이다.

가역적 단열 과정에서 엔트로피는 일정한 값을 유지하므로 다음 식을 얻는다.

$$VT^{3/2} = k \quad (21)$$

여기서 $T^{3/2}$ 는 기체 분자들의 병진운동이 삼차원 공간에서 일어나는 것과 관련된다. 병진운동뿐 아니라 회전이나 진동도 할 수 있는 분자들로 이루어진 기체의 경우는 다음과 같이 일반화 할 수 있다.

$$VT^{f/2} = k \quad (22)$$

여기서 f 는 기체 분자의 자유도이며 $(\gamma - 1)f = 2$ 를 만족하므로 위의 Eq. (22)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$TV^{\gamma-1} = k \quad (23)$$

Equation (3)의 상태방정식을 이용하여 다른 단열 관계식들도 유도할 수 있다.

통계역학적인 계산을 통하여 단열 관계식을 유도하는 것은 일반물리학의 수준을 넘는다. 물리관련 전공자들이 통계역학적 계산을 통해 이상기체의 엔트로피를 계산하고 이로부터 이상기체의 단열 관계식을 유도한다면 반복학습을 통해 단열 과정의 이해에서 최고 수준에 도달한 것이며 물리법칙의 일관성을 알 수 있게 된다.

III. 결론 및 제언

도표를 이용하여 이상기체의 단열 관계식을 유도하는 방법에 대하여 알아보았다. 또한 비교를 위하여 기존의 방법 즉 미분방정식을 이용한 방법과 통계역학적 방법도 아울러 소개하였다. 대부분의 일반물리학 교재에서는 미분식으로 표현된 열역학 제1법칙에서 출발하여 단열 관계식을 유도하는데 미분 방정식의 해를 구하는 과정이나 편미분에 익숙하지 않은 학생들에게 부담스러울 수 있다. 이때 도표를 쓰는 시각적 방법을 활용하여 단열 관계식을 유도하면 수학적 부담을 줄이고 유도과정을 직관적으로 이해하도록 도울 수 있다. 우리는 세 가지 도표 즉 PV , TV , TP 도표에서 단열 과정에 대한 엔트로피 변화를 계산하고 이를 통해 단열 관계식을 유도하였다. 통계역학적 방법은 물리관련 전공자들을 위한 방법이다.

세 가지 방법을 순차적으로 활용하여 단열 과정에 대한 이해를 강화할 수 있다. 먼저 일반물리학 강의에서 열역학 제1법칙을 설명할 때는 미분식을 이용한 방법으로 단열 관계식이 유도됨을 보이고, 다음에 열역학 제2법칙을 설명하면서 도표를 이용한 방법으로 단열 관계식이 유도됨을 보일 수 있다. 마지막으로 물리관련 전공자에게는 통계역학적 계산을 통해 이상기체의 엔트로피를 유도한 후 단열 관계식을 설명하면 단열 과정에 대한 가장 높은 수준의 이해에 도달하게 되고 다른 방법으로 같은 결과가 유도된다는 물리법칙의 일관성도 보일 수 있다.

REFERENCES

- [1] H. Benson, *University Physics*, Rev. Ed. (John Wiley, 2003), Chap. 19.
- [2] P. A. Tipler and G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th Ed. (W. H. Freeman, 2008), Chap. 18.
- [3] W. Bauer and G. D. Westfall, *University Physics with Modern Physics* (McGrawHill, 2011), Chap. 19.
- [4] J. Walker, D. Halliday, and R. Resnick, *Principles of Physics*, 10th Ed. (Wiley, 2014), Chap. 19.
- [5] R. A. Serway and J. W. Jewett, *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, 10th Ed. (Cengage, 2019), Chap. 20.
- [6] D. V. Schroeder, *An Introduction to Thermal Physics* (Pearson, 2000), Chap. 4.
- [7] D.-J. Park, S.-H. Paik and S.-J. Kang, An Analysis of problems related to cloud making experiments in school science textbooks and development of an experiment based on the thermodynamic theories, *J. Korean Assoc. Sci. Educ.* **21**, 547 (2001).
- [8] E. Segrè, *From Falling Bodies to Radio Waves: Classical Physicists and Their Discoveries* (W. H. Freeman, 1984), Chap. 5.
- [9] E. M. Lifshitz and L. P. P. Pitaevskii, *Statistical Physics*, 3rd Ed. (Pergamon, 1980), Sect. 43.
- [10] J. Lee and J. Song, Physics students' difficulties in understanding the concept of entropy, *Sae Mulli* **55**, 182 (2007).
- [11] J. Lee and J. Song, Science high school students' understanding of the movement of an irreversible adiabatic system toward an equilibrium state, *New Phys.*: *Sae Mulli* **63**, 606 (2013).
- [12] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (McGrawHill, 1965), Chap. 5.
- [13] D. V. Schroeder, *An Introduction to Thermal Physics* (Pearson, 2000), Chap. 1.
- [14] S. J. Blundell and K. M. Blundell, *Concepts in Thermal Physics* (Oxford U. Press, 2006), Chap. 16.
- [15] K. Stowe, *Introduction to Statistical Mechanics and Thermodynamics*, 2nd Ed. (Cambridge, 2007), Chap. 12.
- [16] R. J. Hardy and C. Binek, *Thermodynamics and Statistical Mechanics: An Integrated Approach* (John Wiley, 2014), Chap. 4.
- [17] J. Lee, *Statistical Thermodynamics* (Kyomunsa, 2021), Chap. 2.
- [18] C. Kittel and H. Kroemer, *Thermal Physics* (W. H. Freeman and Co., 1980), Chap. 6.

- [19] H. Y. Choi and S. K. Shim, A study on the improvement of basic general mathematics according to changes in the basic mathematical ability of first-year college students in the fields of science and engineering, *Korean J. Gen. Educ.* **15**, 85 (2021).
- [20] H. Kim and N. Lee, Relationship between high-school student' science achievement level, *New Phys.: Sae Mulli* **63**, 252 (2013).
- [21] J. Lee, K. Lee and J. An, An analysis of the authentic inquiry components in science inquiry experiments textbooks developed under the 2015 revised national curriculum, *J. Korean Chem. Soc.* **63**, 183 (2019).
- [22] I. Lee, H.-G. Yoon and J. Park, Exploration of types of middle school students' scientific explanations of thermal phenomena, *New Phys.: Sae Mulli* **74**, 578 (2024).